пределах производить осознанный технико-экономический выбор исполнения шин повышенной безопасности, более полно учитывающий специфику эксплуатации карьерного автотранспорта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Днепрошина: годы, события, люди. Краткая история открытого акционерного общества «Днепрошина» / Вербас В.В., Тютин В.А., Стрежак В.И., Ситайло В.И., Суслин В.И.; Под общ. ред. В.И. Суслина. —Днепропетровск: Пороги, 2001. —154 с.
2. Внедорожные шины мировых лидеров. Научное издание / Тютин В.А., Вербас В.В., Смирнов А.Г., Варивода В.И.; Под общ. ред. А.Г. Смирнова. —Днепропетровск: УкО ИМА-пресс, 1999. —304 с.
3. Accident — free tyres of lifting-and-conveying vehicles / Tyutin V.A., Verbas V.V., Naumenko A.P., Smirnov A.G. // Scientific edition. Translated from Russian by G.G. Pilyushenko. Under general edition of Doctor of Sciences A.P. Naumenko. —Dnieropetrovsk: IMA-press, 2001. —184 p.
4. Свойства резиновых смесей и резин. Оценка, регулирование, стабилизация. Научное издание / Овчаров В.И., Бурмистр М.В., Тютин В.А., Вербас В.В., Смирнов А.Г., Науменко А.П.; Под общ. ред. В.И. Овчарова. —М: Изд. Дом «САНТ-ТМ», 2001. —400 с.
5. Вседорожные шины лесной техники. Научное издание.: Пер. с укр. В.А. Прокопенко / Вербас В.В., Тютин В.А., Смирнов А.Г., Науменко А.П., Варивода В.И.; Под общ. ред. А.П. Науменко. — Днепропетровск: ИМА-пресс, 2002. —320 с.
6. Технико-экономический выбор карьерных шин. Научное издание. / Вербас В.В., Смирнов А.Г., Науменко А.П., Варивода В.И., Пономаренко П.И., Дзюра Е.А.; Под общ. ред. А.Г. Смирнова. — Днепропетровск: ИМА-пресс, 2003. —320 с.

УДК 532.5:532.135

Кузяєв І.М., Начовний І.І, Богуцька Є.О.,
Хорольський М.С.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ У МІЖДИСКОВИХ ЗАЗОРАХ ЧЕРВ'ЯЧНО-ДИСКОВИХ ЕКСТРУДЕРІВ. ЧАСТИНА 1: РОЗРАХУНОК ЕНЕРГОСИЛОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Розглянуті процеси, що відбуваються в міждискових зазорах черв'ячно-дискових екструдерів з урахуванням потоків, які виникають за рахунок сумісного обертання одного з дисків і дії черв'яка, що нагнітає.

MATHEMATICAL SIMULATION OF PROCESSES IN INTERDISK CLEARANCES WORM-DISK EXTRUDERS. PART 1: CALCULATIONS OF ENERGY-POWER PERFORMANCES

The processes are surveyed which happen in interdisk clearances of worm-disk extruders in view of streams, which result corotations of one of disks and injecting operation of an worm.

1 Основні положення та припущення

На даний час у промисловості випускають два типи черв'ячно-дискових екструдерів: перший виконаний з однаковими діаметрами черв'ячної частини і диска; у другого діаметр диска має більший розмір, ніж діаметр черв'яків. Причому характеристики першої схеми є більш жорсткими. Друга схема характеризується більшою гнучкістю у проведенні процесів дискової екструзії за рахунок підбору відношення діаметрів, а також введення зони з зустрічними потоками. Таким чином, розрахункову схему для дискової робочої зони в загальному випадку можна подати, як показано на рис. 1.

На рис. 1 представлена дискова зона з двома зазорами 1 і 2. Причому, в залежності від напрямку обертання один із зазорів може бути першим, а інший другим. Принципової різниці при опису процесів у цих зазорах немає. Однак, необхідно ураховувати той момент, що для першого зазору, по ходу течії матеріалу, потік, який створюється черв'яком, має позитивний напрямок уздовж осі r, а для другого – негативний. Крім того, необхідно відзначити ще й той факт, що перша дискова зона може експлуатуватися в режимі плавлення матеріалу на останній стадії загальної зони пластикації, яка починається в черв'ячній зоні. Але основне функціональне призначення дискових зон полягає в інтенсивному змішуванні й гомогенізації розплавів за рахунок значних зсувних деформацій.

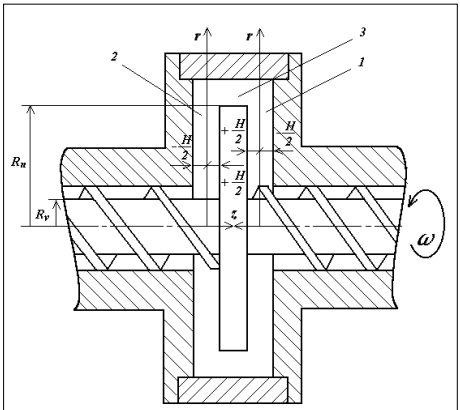

Рис. 1 – Схема дискової зони

Внаслідок того, що в більшості випадків товщина диска є величиною вищого порядку малості в порівнянні з його діаметром, то внесок циліндричної зони 3 у сумарний гідродинамічний ефект буде незначним.

У більшості випадків розплави полімерів являють собою в'язкопружні рідини, при переробці яких виникають ефекти, що не властиві для звичайних рідких середовищ. У першу чергу тут необхідно виділити ефект Вайссенберга, який у випадку для течії між двома дисками характеризується появою доцентрових потоків на відміну від наявності відцентрових потоків для рідин, які не мають пружних властивостей. Урахування таких ефектів можна здійснити, якщо використати відповідні реологічні рівняння стану, які ураховують як аномально в'язкі властивості, так і пружні параметри розплавів полімерів. На сьогодні існує багато різновидів реологічних рівнянь стану, що описують поведінку в'язкопружних рідин [1-4]. Найбільш оптимальним з точки зору адекватності теоретичних і експериментальних даних, а також складності математичної моделі, є модифіковане рівняння для рідини другого порядку [5], згідно з яким можна записати наступне реологічне рівняння стану

$$\sigma = \eta(I_{2d})\cdot A_1 + \psi_1(I_{2d})\cdot (A_1)^2 - \psi_2(I_{2d})\cdot A_2\,, \qquad (1)$$

де σ – тензор напружень;

A_1, A_2 – тензори Рівліна-Еріксена, відповідно, першого й другого порядку;

$\eta(I_{2d}), \psi_1(I_{2d}), \psi_2(I_{2d})$ – матеріальні функції, які залежать від другого інваріанта тензора швидкостей деформацій I_{2d}.

Для матеріальних функцій можна записати такі вирази [6]

$$\eta(I_{2d}) = K_1 \cdot \left|\frac{1}{2} \cdot I_{2d}\right|^{m_1/2}, \tag{2}$$

$$\psi_1(I_{2d}) = K_2 \cdot \left|\frac{1}{2} \cdot I_{2d}\right|^{m_2/2}, \tag{3}$$

$$\psi_2(I_{2d}) = K_3 \cdot \left|\frac{1}{2} \cdot I_{2d}\right|^{m_3/2}, \tag{4}$$

де K_1, K_2, K_3, m_1, m_2, m_3, — характеристики матеріалу, які визначаються внаслідок віскозиметричних досліджень.

Необхідно відзначити, що для багатьох розплавів полімерів справедливі наступні рівності

$$m_1 = n - 1, \quad m_2 = m_3 = m_1 - 1 = n - 2, \tag{5}$$

де n — показник ступеня у моделі для неньютонівської рідини Оствальда-Вейла.

Тензори Рівліна-Еріксена можна подати таким чином [7]

$$A_1 = L + L^T, \tag{6}$$

$$A_2 = \frac{DA_1}{Dt} + L^T \cdot A_1 + L \cdot A_1, \tag{7}$$

де L — тензор градієнтів швидкості;

L^T — тензор, що транспонований від L;

DA_1/Dt — субстанціональна похідна від тензора A_1.

Другий інваріант тензора швидкостей можна знайти наступним чином

$$I_{2d} = t_r(A_1)^2. \tag{8}$$

Ураховуючи взаємозв'язок тензора градієнтів швидкості L з тензором швидкостей деформацій

$$d = \frac{1}{2} \cdot \left(L + L^T\right),$$

можна записати наступну залежність

$$A1 = 2 \cdot d. \tag{9}$$

Як видно зі схеми на рис. 1, опис процесів у дискових зазорах необхідно виконувати в циліндричній системі координат. У загальному випадку рівняння руху в цій системі координат мають наступний вигляд

$$\rho \cdot \frac{DV_r}{Dt} = -\frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \rho \cdot g_r, \tag{10}$$

$$\rho \cdot \frac{DV_\varphi}{Dt} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \cdot \sigma_{\varphi r} + \rho \cdot g_\varphi, \tag{11}$$

$$\rho \cdot \frac{DV_z}{Dt} = -\frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{z\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \sigma_{zr} + \rho \cdot g_z, \tag{12}$$

де ρ – густина матеріалу;

$\sigma_{i,j}$ – компоненти тензора напружень;

P – тиск;

$\rho \cdot g_i$ – компоненти масових сил;

V_i – компоненти вектора швидкості.

Для субстанціональних похідних від компонентів вектора швидкостей справедливі наступні вирази

$$\frac{DV_r}{Dt} = -\frac{\partial V_r}{\partial r} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot V_\varphi \cdot \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{1}{r} \cdot V_\varphi^2 , \tag{13}$$

$$\frac{DV_\varphi}{Dt} = \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot V_\varphi \cdot \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + V_z \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot V_r \cdot V_\varphi , \tag{14}$$

$$\frac{DV_z}{Dt} = \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot V_\varphi \cdot \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \tag{15}$$

Тензор градієнтів швидкостей має вигляд

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \cdot V_\varphi \right) & \frac{\partial V_r}{\partial z} \\ \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} & \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \cdot V_r \right) & \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{bmatrix}, \tag{16}$$

Для тензора $A1$ можна записати таку матрицю

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 \cdot \frac{\partial V_r}{\partial r} & \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \cdot V_\varphi \right) & \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) \\ \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \cdot V_\varphi \right) & 2 \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \cdot V_r \right) & \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) \\ \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) & \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) & 2 \cdot \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Як показали теоретичні та експериментальні дослідження [8-12] у міждисковому зазорі виникають дві складові швидкості: радіальна V_r і тангенціальна V_φ. Що ж стосується осьової складової V_z, то нею вздовж усього об'єму, за винятком області входу й виходу з міждискового зазору, можна нехтувати. Причому, обидві складові, а саме V_r і V_φ, у загальному випадку мають нелінійний характер. Але нелінійність тангенціальної складової не вносить значного впливу на енергосилові параметри процесу дискової екструзії, а тому для спрощення математичної моделі можна припустити лінійний розподіл V_φ уздовж міждискового зазору. З урахуванням останнього зауваження можна записати наступний вираз

$$V_\varphi(z,r) = \Omega(z) \cdot r . \tag{18}$$

Якщо початок системи координат розташувати посередині міждискового зазору, як показано на рис. 1, то для функції $\Omega(z)$ можна записати наступний вираз

$$\Omega(z)=\frac{2\cdot\pi\cdot\omega}{H}\cdot\left(z+\frac{H}{2}\right), \tag{19}$$

де ω — частота обертання диска;

H — висота міждискового зазору.

У випадку, коли початок системи координат розташований на поверхні нерухомого диска, то рівняння (19) перепишеться таким чином

$$\Omega(z)=\frac{2\cdot\pi\cdot\omega}{H}\cdot z\,. \tag{20}$$

Для розв'язання задачі введемо такі припущення: рідина нестислива, потік стаціонарний та осесиметричний відносно осі φ, масові сили нехтовно малі в порівнянні з в'язкими. З урахуванням зроблених припущень, а також зауважень відносно компонентів швидкості, рівняння руху (10)-(12) можна записати в такому вигляді

$$\rho\cdot\left(V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}-\Omega^2\cdot r\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}}{r}, \tag{21}$$

$$\rho\cdot\left(V_r\frac{\partial V_\varphi}{\partial r}+V_r\cdot\Omega\right)=\frac{\partial\sigma_{\varphi r}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{\varphi z}}{\partial z}+\frac{2}{r}\cdot\sigma_{\varphi r} \tag{22}$$

$$0=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{1}{r}\cdot\sigma_{zr}. \tag{23}$$

Рівняння нерозривності з урахуванням прийнятих припущень запишеться так

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot V_r\right)=0\,. \tag{24}$$

Подамо радіальну складову швидкості через добуток двох функцій, одна з яких залежить від координати z, а інша — від r

$$V_r(z,r)=f(z)\cdot\delta(r)\,. \tag{25}$$

Ураховуючи формулу (24), останню залежність можна подати так

$$V_r(z,r)=\frac{f(z)}{r}\,. \tag{26}$$

Для циліндричної системи координат, з урахуванням виразів для компонентів швидкості (18) і (26), а також прийнятих припущень, тензор L у матричному запису має вигляд

$$L=\begin{bmatrix}-\frac{1}{r^2}f & -\Omega & \frac{1}{r}\dot{f}\\ \Omega & \frac{1}{r^2}f & \Phi\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \tag{27}$$

де

$$\Phi=r\cdot\frac{d\Omega}{dz}=r\cdot G_1,\quad \dot{f}=\frac{df}{dz},\quad G_1=\frac{2\cdot\pi\cdot\omega\mu}{H}. \tag{28}$$

У останніх залежностях функції f, $\dot{f}$, Ω умовно представлені для спрощення запису без аргументу z.

Використовуючи формули (6) і (7) з урахуванням (27), а також рівняння (2) і (4) з урахуванням (5) і (8), рівняння (1) у матричній формі запишеться таким чином

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\varphi} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\varphi r} & \sigma_{\varphi\varphi} & \sigma_{\varphi z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\varphi} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = K_1|B|^{n_1}\begin{bmatrix} -\frac{2}{r^2}f & 0 & \frac{1}{r}\dot{f} \\ 0 & \frac{2}{r^2}f & \Phi \\ \frac{1}{r}\dot{f} & \Phi & 0 \end{bmatrix} - K_3|B|^{n_2}\begin{bmatrix} \frac{8}{r^4}f^2 & 0 & -\frac{4}{r^3}f\dot{f} \\ 0 & 0 & \frac{4}{r^2}f\Phi \\ -\frac{4}{r^3}f\dot{f} & \frac{4}{r^2}f\Phi_{\mu} & \left(\frac{2}{r^2}\dot{f}^2 + 2\Phi^2\right) \end{bmatrix} + \tag{29}$$

$$+ K_2|B|^{n_2}\begin{bmatrix} \frac{4}{r^4}f^2 + \frac{1}{r^2}\dot{f}^2 & \frac{1}{r}\dot{f}\Phi_{\mu} & -\frac{2}{r^3}f\dot{f} \\ \frac{1}{r}\dot{f}_{\mu} & \frac{4}{r^4}f^2 + \Phi^2 & \frac{2}{r^2}f\Phi \\ -\frac{2}{r^3}f\dot{f} & \frac{2}{r^2}f\Phi_{\mu} & \frac{1}{r^2}\dot{f}^2 + \Phi^2 \end{bmatrix},$$

де $$B = \frac{4}{r^4}\cdot f^2 + \frac{1}{r^2}\cdot \dot{f}^2 + \Phi^2,\ \ n_1 = \frac{n-1}{2},\ \ n_2 = \frac{n-2}{2}. \tag{30}$$

Підставляючи відповідні компоненти тензора напружень із виразу (29) у рівняння руху (21)-(23), можна отримати систему нелінійних диференційних рівнянь у звичайних похідних. З урахуванням того, що функція V_{φ} задана, можна скористатися тільки рівнянням (21), яке після перетворень буде мати вигляд

$$\ddot{f}\left[a_1\left(r^2|B|^{n_1} + m_1\dot{f}^2|B|^{n_3}\right) - a_2\left(m_2 f\dot{f}^2|B|^{n_4} + r^2 f|B|^{n_2}\right)\right] -$$
$$-\left(C_{11}f^3 + C_{12}f\dot{f}^2 + C_{13}f\right)\cdot|B|^{n_3} - \left(C_2 f^4 + C_3 f^2\dot{f}^2 + C_4 f^2 + C_6\dot{f}^4 + C_7\dot{f}^2\right)\cdot|B|^{n_4} - \tag{31}$$
$$-\left(C_{51}f^2 + C_{52}\dot{f}^2 + C_{53}\right)|B|^{n_2} = \rho\left(\frac{-f^2}{r^3} - \frac{\Phi^2 z^2}{r}\right) + d\rho_{\mathrm{r}}$$

де $$a_1 = \frac{K_1}{r^3},\ \ a_2 = \frac{2\cdot(K_2 - K_3)}{r^5},\ \ \ d\rho_{\mathrm{r}} = \frac{\partial\rho}{\partial r}$$

$$n_3 = \frac{n-3}{2},\ \ n_4 = \frac{n-4}{2},\ \ C_{11} = -\frac{K_1\cdot m_1\cdot 6}{r^7},\ \ C_{12} = -\frac{K_1\cdot m_1\cdot 6}{r^5},$$

$$C_{13} = -\frac{K_1\cdot m_1\cdot 2\cdot\Phi^2}{r^3},\ \ C_2 = \frac{32\cdot(K_2 - 2\cdot K_3)\cdot m_2}{r^9},\ \ C_3 = \frac{4\cdot(5\cdot K_2 - 4\cdot K_3)\cdot m_2}{r^7},$$

$$C_4 = -\frac{4\cdot(K_2 - 2\cdot K_3)\cdot m_2\cdot\Phi^2}{r^5},\ \ C_{51} = \frac{8\cdot(2\cdot K_2 - 3\cdot K_3)}{r^5},$$

$$C_{52} = \frac{(3\cdot K_2 - 2\cdot K_3)}{r^5},\ \ C_{53} = \frac{K_2\cdot\Phi^2}{r},\ \ C_6 = \frac{K_2\cdot m_2}{r^5},\ \ C_7 = -\frac{K_2\cdot m_2\cdot\Phi^2}{r^3}.$$

Перед подальшим розв'язанням рівняння (31) необхідно зробити деякі зауваження. Течія в міждисковому зазорі відбувається за рахунок двох факторів: перший — за рахунок обертання диска; другий — за рахунок подачі матеріалу в дисковий зазор черв'яком. У загальному випадку будемо мати сумарний потік від цих двох факторів. Причому в одно-

му дисковому зазорі ці два потоки будуть мати однакові напрямки, а в іншому — протилежні, що в сумарному значенні при деяких технологічних і геометричних параметрах робочої зони може привести до порушення суцільності потоку та, як наслідок, до з'явлення пульсацій, які негативно впливають на якість виробів.

2 Моделювання процесів з урахуванням тільки обертання диска

Для розв'язання нелінійного диференційного рівняння (31) використовувався пакет Mathcad. Причому в якості досліджуваного матеріалу взятий полістирол, який має наступні характеристики [6]: $n = 0{,}31$; $K_1 = 1{,}73 \cdot 10^4$ Па·с^n; $K_2 = 1{,}77 \cdot 10^4$ Па·с^n; $K_3 = 1{,}64 \cdot 10^4$ Па·с^n; $\rho = 910$ кг/м^3. Були досліджені особливості впливу різних геометричних і технологічних параметрів дискової зони на характер течії.

У програмі, яка є у авторів визначалась функція $f(z)$ при таких параметрах: $\omega = 3$ с$^{-1}$; $H = 6$ мм; $r = 120$ мм; $\partial P/\partial r = 0{,}5 \cdot 10^6$ Па/м. Графік залежності функції $f(z)$ (рис. 2), яка знайдена за допомогою програми показує на доцентровий напрямок потоку в міждисковому зазорі, на що вказує негативне значення $f(z)$. Причому, такий режим характерний для різних технологічних і геометричних параметрів. Вигляд епюри не змінюється при переході від одного значення параметра (ω, H, r, $\partial P/\partial r$) до іншого, а змінюється тільки величина функції $f(z)$. Так, наприклад, при зростанні ω і H відбувається й збільшення значення $f(z)$ (для значної області реальних режимів роботи спостерігається лінійна залежність). Що ж стосується градієнта тиску, то він починає впливати від величини, яка дорівнює 10^5 Па/м.

Виконуючи аналіз впливу кожного з членів у рівнянні (31) на рішення, можна зробити висновок, що рівняння (31) адекватне наступному рівнянню

$$\ddot{f} \cdot \frac{K_1 \cdot \Phi^{n-1}}{r} - \frac{K_2}{r} \cdot \Phi^n = d\,\rho_r \,. \qquad (32)$$

Аналітичне рішення рівняння (32) з урахуванням умови (19) має вигляд

$$f(z) = \frac{H^2 r}{8K_1} \cdot \left[K_2 G_1 + \frac{d\,\rho_r}{(G_1 r)^{m_1}} \right] \cdot \left[\left(\frac{2z}{H} \right)^2 - 1 \right]. \qquad (33)$$

Графік, побудований за рівнянням (33) за такими ж характеристиками, що і у програмі, показаний на рис. 3.

При порівнянні графіків на рис. 2 і рис. 3 видно, що вони повністю ідентичні. Таким чином, для розрахунку параметрів процесу в міждисковому зазорі можна користуватися формулою (33).

Для визначення градієнта тиску в рівнянні (33) необхідно скористатися рівнянням нерозривності в інтегральній формі, а саме, рівністю продуктивності в будь-якому перетині міждискового зазору. Для цього запишемо наступне співвідношення

$$2\cdot\pi\int_{-H/2}^{H/2} f(z)\cdot dz = 2\cdot\pi\int_{-H/2}^{H/2} f(z)_{RV}\cdot dz\ . \qquad (34)$$

У лівій частині записана продуктивність через поточний радіус r, а у правій — через радіус вихідного отвору R_V. При цьому величина $f(z)_{RV}$ підставляється з формули (33) при $r = R_V$. З рівняння (34) знаходимо

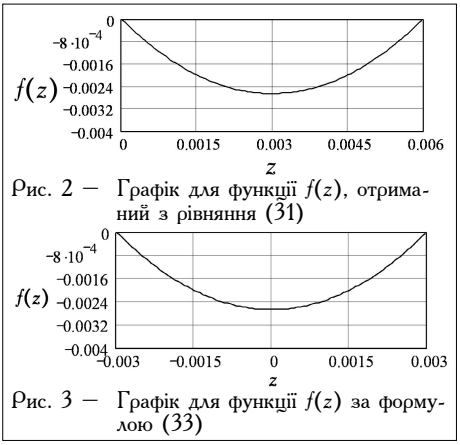

Рис. 2 — Графік для функції $f(z)$, отриманий з рівняння (31)

Рис. 3 — Графік для функції $f(z)$ за формулою (33)

$$d\rho_r = \frac{\partial\rho}{\partial r} = K_2\cdot G_1^n\cdot r^{n-1}\cdot\frac{\left(\frac{R_V}{r}-1\right)}{\left[1-\left(\frac{R_V}{r}\right)^{2-n}\right]}\ . \qquad (35)$$

Після підстановки виразу (35) у рівняння (33) остаточно отримаємо вираз для функції, що характеризує радіальний напрямок течії в зазорі між двома дисками, один з яких обертається

$$f(z) = \frac{K_2\cdot G_1\cdot H^2\cdot r}{8\cdot K_1}\cdot\left\{1-\frac{\left(1-\frac{R_V}{r}\right)}{\left[1-\left(\frac{R_V}{r}\right)^{2-n}\right]}\right\}\cdot\left[\left(\frac{2\cdot z}{H}\right)^2-1\right]. \qquad (36)$$

Щоб розрахувати потужність, необхідно взяти інтеграл від функції дисипації вздовж усього об'єму міждискового зазору, тобто в загальному вигляді можна записати наступний вираз

$$N_{i,j} = \int_0^2\int_{-H/2}^{H/2}\int_{R_V}^{R_n}\left|\sigma_{ij}\cdot\begin{bmatrix}(A_1)_{i,j} & при & i\neq j\\ d_{i,j} & при & i=j\end{bmatrix}\right|\cdot r dr dz d\varphi\ , \qquad (37)$$

де $\sigma_{i,j}$ — компоненти тензора напружень;

$d_{i,j}$ — компоненти тензора швидкостей деформації d;

$(A_1)_{i,j}$ — компоненти тензора Рівліна-Еріксена A_1.

Внаслідок того, що компоненти всіх величин, які входять у формулу (37) не залежать від координати φ, то можна записати

$$N_{i,j} = 2\pi \int_{-H/2}^{H/2} \int_{R_V}^{R_n} \left| \sigma_{ij} \cdot \begin{bmatrix} (A_1)_{i,j} & при & i \neq j \\ d_{i,j} & при & i = j \end{bmatrix} \right| \cdot r dr dz . \qquad (38)$$

Розрахунок складових тензора напружень, а також потужності, яка споживається за рахунок кожного з компонентів тензора напружень, за допомогою Mathcad є у авторів.

З отриманих результатів можна зробити висновок, що основний внесок у загальну споживану потужність у міждисковому зазорі вносить складова потужності за рахунок компонента $\sigma_{\varphi z}$.

Іншими компонентами можна нехтувати.

Знайдемо далі функцію розподілу тиску у напрямку осі r, використовуючи формулу (35). Для цього подано її таким чином

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = K_2 \cdot G_1^n \cdot r^{n-1} \cdot \left(\frac{R_V}{r} - 1 \right) \cdot \left[1 - \left(\frac{R_V}{r} \right)^{2-n} \right]^{-1} . \qquad (39)$$

Співвідношення R_V/r завжди менше одиниці (у граничному значенні дорівнює одиниці) і тому вираз, що стоїть у квадратних дужках, можна розкласти в біноміальний ряд. Якщо залишити три члени ряду, то отримаємо

$$\left[1 - \left(\frac{R_V}{r} \right)^{2-n} \right]^{-1} = 1 + \left(\frac{R_V}{r} \right)^{2-n} + \left(\frac{R_V}{r} \right)^{2\cdot(2-n)} .$$

З урахуванням останнього виразу після нескладних перетворень рівняння (34) буде мати вигляд

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = K_2 \cdot G_1^n \cdot \left[R_V \cdot r^{(n-2)} + {R_V}^{(3-n)} \cdot r^{(2\cdot n-4)} + {R_V}^{(5-2\cdot n)} \cdot r^{(3\cdot n-6)} - \right.$$
$$\left. - r^{(n-1)} - {R_V}^{(2-n)} \cdot r^{(2\cdot n-3)} - {R_V}^{(4-2\cdot n)} \cdot r^{(3\cdot n-5)} \right]. \qquad (40)$$

Після розділення змінних і інтегрування в рівнянні (40) отримаємо

$$\rho(r) = K_2 \cdot G_1^n \cdot \left[\frac{R_V \cdot r^{(n-1)}}{n-1} + \frac{{R_V}^{(3-n)} \cdot r^{(2\cdot n-3)}}{2\cdot n-3} + \frac{{R_V}^{(5-2\cdot n)} \cdot r^{(3\cdot n-5)}}{3\cdot n-5} - \right.$$
$$\left. - \frac{r^n}{n} - \frac{{R_V}^{(2-n)} \cdot r^{(2\cdot n-2)}}{2\cdot n-2} - \frac{{R_V}^{(4-2\cdot n)} \cdot r^{(3\cdot n-4)}}{3\cdot n-4} \right] + C_\rho . \qquad (41)$$

Щоб знайти константу інтегрування C_ρ, скористаємося відсутністю тиску на зовнішньому радіусі, тобто можна записати

$$\rho = 0 \text{ при } r = R_n .$$

Тоді для константи інтегрування маємо

$$C_\rho = -K_2 \cdot (G_1 \cdot R_n)^n \left[\frac{R_V}{R_n} \cdot \frac{1}{n-1} + \left(\frac{R_V}{R_n}\right)^{3-n} \cdot \frac{1}{2 \cdot n - 3} + \left(\frac{R_V}{R_n}\right)^{5-2 \cdot n} \cdot \frac{1}{3 \cdot n - 5} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{n} - \left(\frac{R_V}{R_n}\right)^{2-n} \cdot \frac{1}{2 \cdot n - 2} - \left(\frac{R_V}{R_n}\right)^{4-2 \cdot n} \cdot \frac{1}{3 \cdot n - 4} \right]. \qquad (42)$$

Після підстановки виразу (42) у рівняння (41) остаточно отримаємо формулу для розподілу тиску в міждисковому зазорі за рахунок обертання одного з дисків

$$\rho(r) = K_2 \cdot (G_1 \cdot R_n)^n \cdot \left\{ \frac{R_V}{R_n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \left[\left(\frac{r}{R_n}\right)^{(n-1)} - 1 \right] + \left(\frac{R_V}{R_n}\right)^{(3-n)} \cdot \frac{1}{2 \cdot n - 3} \cdot \left[\left(\frac{r}{R_n}\right)^{(2 \cdot n - 3)} - 1 \right] + \right.$$
$$+ \left(\frac{R_V}{R_n}\right)^{(5-2 \cdot n)} \cdot \frac{1}{3 \cdot n - 5} \cdot \left[\left(\frac{r}{R_n}\right)^{(3 \cdot n - 5)} - 1 \right] - \frac{1}{n} \cdot \left[\left(\frac{r}{R_n}\right)^{n} - 1 \right] - \qquad (43)$$
$$\left. - \left(\frac{R_V}{R_n}\right)^{(2-n)} \cdot \frac{1}{2 \cdot n - 2} \cdot \left[\left(\frac{r}{R_n}\right)^{(2 \cdot n - 2)} - 1 \right] - \left(\frac{R_V}{R_n}\right)^{(4-2 \cdot n)} \cdot \frac{1}{3 \cdot n - 4} \cdot \left[\left(\frac{r}{R_n}\right)^{(3 \cdot n - 4)} - 1 \right] \right\}.$$

Для отримання осьового зусилля, яке діє на диск, необхідно скористатися наступною залежністю

$$F = 2 \int_{R_n}^{R_V} \left[\rho(r) - \sigma_{zz}\left(r, \frac{H}{2}\right) \right] \cdot r dr \,. \qquad (44)$$

3 Моделювання процесів з урахуванням нагнітаючої дії черв'яків

Якщо урахувати тільки нагнітаючу дію черв'яків, припускаючи, що диски нерухомі, то рівняння (31) перепишеться так

$$\ddot{f} \cdot \left[a_1 \cdot \left(r^2 \cdot |B_n|^{n_1} + m_1 \cdot \dot{f}^2 \cdot |B_n|^{n_3} \right) - a_2 \cdot \left(m_2 \cdot f \cdot \dot{f}^2 \cdot |B_n|^{n_4} + r^2 \cdot f \cdot |B_n|^{n_2} \right) \right] -$$
$$- \left(C_{11} \cdot f^3 + C_{12} \cdot f \cdot \dot{f}^2 \right) \cdot |B_n|^{n_3} - \left(C_2 \cdot f^4 + C_3 \cdot f^2 \cdot \dot{f}^2 + C_6 \cdot \dot{f}^4 \right) \cdot |B_n|^{n_4} - \qquad (45)$$
$$- \left(C_{51} \cdot f^2 + C_{52} \cdot \dot{f}^2 \right) \cdot |B_n|^{n_2} = -\rho \cdot \frac{f^2}{r^3} + d\,\Omega_r,$$

де $B_n = \frac{4}{r^4} \cdot f^2 + \frac{1}{r^2} \cdot \dot{f}^2.$

Як показали розрахунки, у широкому інтервалі геометричних і технологічних параметрів, рівняння (45) для реальних режимів роботи екструзійного агрегату адекватне наступному, більш простому рівнянню

$$\dot{f} = r \left(\frac{d\,\Omega_r}{K_1} \right)^{1/n} \cdot |z|^{1/n}. \qquad (46)$$

Рішення рівняння (46) має вигляд

$$f = r \cdot \left(\frac{d\rho_r}{K_1} \right)^{1/n} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot |z|^{(n+1)/n} + C_1.$$

Визначаючи константу інтегрування C_1 із граничної умови

$$f = 0 \text{ при } z = H/2,$$

знаходимо

$$f(z) = r \left(\frac{\partial \rho_r}{K_1} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} \left[|z|^{\frac{(n+1)}{n}} - \left(\frac{H}{2} \right)^{\frac{(n+1)}{n}} \right] = r \left(\frac{\partial \rho_r}{K_1} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} \left(\frac{H}{2} \right)^{\frac{(n+1)}{n}} \left[\left| \frac{2z}{H} \right|^{\frac{(n+1)}{n}} - 1 \right]. \quad (47)$$

Градієнт тиску $d\rho_r$ створюється за рахунок нагнітаючої дії черв'яка, тобто буде відповідати визначеній продуктивності черв'ячної частини Q. Тоді можна записати наступне співвідношення

$$Q = 2 \cdot \pi \cdot \int_{-H/2}^{H/2} f(z) \cdot dz = 4 \cdot \pi \cdot \int_{0}^{H/2} f(z) \cdot dz \,. \quad (48)$$

Після підстановки рівняння (47) у вираз (48) та інтегрування отримаємо наступну залежність для градієнта тиску

$$d\rho_r = \pm \frac{K_1 \cdot 2}{H^{2 \cdot n+1}} \cdot \left(\frac{Q}{\pi \cdot r} \right)^n \cdot \left(\frac{2 \cdot n+1}{n} \right)^n. \quad (49)$$

Негативне значення градієнта $d\rho_r$ у рівнянні (49) вказує на зменшення розподілу тиску в напрямку від центра до периферії. При позитивному значенні $d\rho_r$ максимальне значення буде в області зовнішнього радіусу.

Підставляючи рівняння (49) у вираз (47), отримаємо

$$f(r) = \pm \frac{Q}{2\pi \cdot H} \cdot \frac{2 \cdot n+1}{n+1} \cdot \left[1 - \left| \frac{2 \cdot z}{H} \right|^{(n+1)/n} \right]. \quad (50)$$

Знак плюс у рівнянні (50) відповідає течії в міждисковому зазорі, що відбувається від центра до периферії, а мінус — навпаки, від зовнішнього діаметра до внутрішнього.

Вираз для розподілу тиску за рівнянням (49) має наступний вигляд

$$\rho(r) = \pm \frac{K_1 \cdot 2}{H^{2 \cdot n+1}} \cdot \left[\frac{Q}{\pi} \right]^n \cdot \left(\frac{2 \cdot n+1}{n} \right)^n \cdot \frac{1}{1-n} \cdot r^{1-n} + C \,. \quad (51)$$

Для визначення константи інтегрування C у рівнянні (51) можна записати наступні граничні умови:

- для позитивного градієнта тиску

$$\rho = 0 \text{ при } r = R_n \,, \quad (52)$$

- для негативного градієнта тиску

$$\rho = 0 \text{ при } r = R_V. \quad (53)$$

Рівняння (52) і (53) записані для випадку, коли, відповідно, при R_n і при R_V знаходиться вихідний отвір.

Таким чином, для розподілу тиску при негативному значенні градієнта тиску маємо

$$P_n(r) = -\frac{2 \cdot K_1}{H^{2 \cdot n+1}} \cdot \left[\frac{Q}{\pi}\right]^n \cdot \left(\frac{2 \cdot n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{1-n} \cdot \left(r^{1-n} - R_{\text{n}}^{1-n}\right), \quad (54)$$

а для позитивного значення градієнта тиску можна записати

$$P_p(r) = \frac{2 \cdot K_1}{H^{2 \cdot n+1}} \cdot \left[\frac{Q}{\pi}\right]^n \cdot \left(\frac{2 \cdot n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{1-n} \cdot \left(r^{1-n} - R_V^{1-n}\right). \quad (55)$$

4 Моделювання процесів з урахуванням сумісної дії обертання дисків і нагнітаючої властивості черв'яка

Використовуючи рівняння (32) і (46), можна записати такий вираз

$$\ddot{f} = \frac{K_2}{K_1} \cdot \Phi + \frac{r}{K_1} \cdot \Phi^{1-n} \cdot d\,\rho_{\text{r}} + \frac{r}{n} \cdot \left|\frac{d\,\rho_{\text{r}}}{K_1}\right|^{1/n} \cdot |z|^{(1-n)/n}. \quad (56)$$

Рішення рівняння (56) має вигляд

$$f(r) = \left(\frac{K_2}{K_1} \cdot \Phi + \frac{r}{K_1} \cdot \Phi^{1-n} \cdot d\,\rho_{\text{r}}\right) \cdot \frac{z^2}{2} + r \cdot \left|\frac{d\,\rho_{\text{r}}}{K_1}\right|^{1/n} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot |z|^{(n+1)/n} + C_1 \cdot z + C_2.$$

З урахуванням граничних умов останнє рівняння можна записати так

$$f(r) = \left(\frac{K_2}{K_1}\Phi + \frac{r}{K_1}\Phi^{1-n} d\,\rho_{\text{r}}\right) \frac{H^2}{8} \left[\left(\frac{2z}{H}\right)^2 - 1\right] + r \left|\frac{d\,\rho_{\text{r}}}{K_1}\right|^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} \left(\frac{H}{2}\right)^{\frac{1+n}{n}} \left[\left|\frac{2z}{H}\right|^{\frac{1+n}{n}} - 1\right]. \quad (57)$$

Для визначення градієнта тиску dρr за аналогією з тим, як це було подано у формулах (34) і (48), можна записати наступний вираз

$$Q + 2\pi \int_{-H/2}^{H/2} f_{36}(z)_{RV} \cdot dz = 2\pi \int_{-H/2}^{H/2} f_{57}(z) \cdot dz, \quad (58)$$

де Q — продуктивність, яка створюється у дисковому зазорі за рахунок нагнітаючої дії черв'яка;

$f_{36}(z)_{RV}$ — функція, яка розраховується за формулою (36) при $r = R_V$;

$f_{57}(z)$ — функція, яка розраховується за формулою (57).

Необхідно зробити наступне зауваження. Течія за рахунок обертання диску для в'язко-пружної рідини має тільки доцентровий характер. Течія за рахунок нагнітаючої дії черв'яка може мати, як позитивний, так і негативний напрямки. Тобто, якщо вважати, що перший дисковий зазор розташований з боку зони пластикації, а другий — з боку формуючої головки, то у формулі (58) значення для Q необхідно, відповідно, підставляти зі знаком плюс і знаком мінус. Виходячи з вище сказаного, у першому дисковому зазорі при визначених геометричних і технологічних параметрах у загальному випадку сумарний потік може бути доцент-

ровим, тобто подача до формуючої головки буде зупинена й процес екструзії порушиться.

Як показали розрахунки для тих же параметрів, що й в зазначених програмах, при масовій продуктивності черв'ячної частини $G = 202{,}588$ кг/год спостерігається стабільна течія. Тобто, у першому зазорі — відцентровий напрямок, а у другому — доцентровий. При масовій продуктивності черв'ячної частини $G = 97{,}756$ кг/год у обох зазорах спостерігається тільки доцентрова течія. Тобто подачі матеріалу через перший дисковий зазор до формуючої головки не буде. У даному випадку, щоб усунути розрив потоку, можна піти декількома шляхами: перший — збільшити подачу матеріалу за рахунок черв'яків; другий — змінити геометричні розміри дискової зони, наприклад, зменшити висоту дискового зазору; третій — зменшити частоту обертання диска; четвертий — змінити температурний режим у дисковій зоні.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Coleman B.D., Noll W. An approximation theorem for functional with applications in continuum mechanics // Arch. Ration. Mtch. Anal. —1960. —№6. —P. 355-370.
2. Rivlin R.S., Ericksen J.L. Stress — deformation relations for isotropic materials // J.Ration. Mech. Anal. — 1955. —№4. —P. 323-425.
3. White J.L., Metzner A.B. Constitutive equations for viscoelastic fluids with application to rapid external // AIChE Jornal. —1965. —V. 11, №2. —P. 324-330.
4. De Witt T.W. A rheological equation of state which predicts non-newtonian viscosity, normal stresses, and dynamic module // I. Appl. Phys. —1955. —V. 26, № 7. —P. 889-894.
5. Bogue D.C. An explicit constitutive equation based on an integrated strain history // Ind. Eng. Fundam. — 1966. —V.5, № 2. —P. 253-259.
6. Han C.D., Drexler L.H. Studies of converging flows of viscoelastic polymeric melts III. Stress and velocity distribution in the entrance region of a tapered slit dil // I. Appl. Polym. Science. —1973. —V. 17, № 8. —P. 2369-2393.
7. Böhme G. Strömungsmechanik nicht-newtonscher Fluide. —B.G. Teubner. —Stuttgart, 1981. —280 s.
8. Ремнев В.П., Тябин Н.В. Распределение скоростей и давлений при течении вязкоупругой жидкости в зазоре дискового экструдера // Мех. полимеров. —1971. —№ 3. —С. 515-521.
9. Iekemov A.G., Reher E.O., Bogdanov W.W. Zur modellierung dez mischprozesses viscoelastischer polymerlµsungen und shwelzen im sheibenextruder spalt II // Plaste und Kautschuk. —1976. —Vol. 23, № 9. -S.561-564.
10. Кузяев И.М., Ким В.С. Исследование течения расплавов полимеров в междисковом зазоре червячно-дискового экструдера // Конструирование и расчет полимерного оборудования. —Ярославль. —1988. — С. 44-53.
11. Kuzjaev I.M., Kim V.S., Ploshenko I.G. Unterchung der Mizchgьte Von Polymerschemelzen im Scherschei benextructer // Plaste und Kautschuk. —1990. —Vol.7, № 9. —S. 308-312.
12. Kim V.S., Samoilov V.A., Kuzaev I.M. Experimentelle und theoretische untersuchungen von Kombinierten Einschechen — Scherzcheibenextruder // Technomer 97,15. Fachtagung Über Verarbeitung und Anwenobung von Polymeren. —Chemnitz. —1997. —Vortag A20. —S. 1-13.